



مفاهيم الرياضيات البحتة

تفاضل وتكامل

الصف الثالث الثانوى

الإشتقاق وتطبيقاته

اشتقاق الدوال المثلثية :

المشتقة	الدالة
جتا س	جا س
- جا س	جتا س
قا س	ظا س
- قتا س	ظتا س
قا س ظا س	قا س
- قتا س ظتا س	قتا س

الاشتقاق الضمني :

اشتقاق العلاقة الضمنية: د (س ، ص) = صفر يتطلب اشتقاق كل من طرفي العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{دص}{دس}$ أو $\frac{دس}{دص}$ على الترتيب.

الاشتقاق البارامترى :

إذا كانت : ص = د (س) ، س = ر (س) يكون : $\frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دس} = \frac{دص}{دس}$

المشتقات العليا للدالة :

إذا كانت : ص = د (س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فتسمى المشتقات بدءًا من المشتقة الثانية (إن وُجدت) بالمشتقات العليا ونرمز لها بالرمز $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ أو $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ والمشتقة الثالثة بالرمز $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ أو $\frac{د^٤ص}{دس^٤}$ والمشتقة النونية بالرمز $\frac{د^١٠ص}{دس^١٠}$ ، أ ، د (س)

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى :

إذا كان : م هو ميل المماس لمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه فإن :

معادلة المماس للمنحنى هي : ص - ص١ = م (س - س١)

معادلة العمودى للمنحنى هي : ص - ص١ = $\frac{1}{م}$ (س - س١)

المعدلات الزمنية المرتبطة :

إذا كانت : $ص = د (س)$ ، $س$ تتغير تبعاً لتغير الزمن $س$ ، فإن : $ص$ تتغير أيضاً تبعاً لتغير الزمن $س$
 أى أن : $ص$ دالة الدالة فى الزمن $س$ و يكون : $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} \times \frac{س}{س}$ وتربط هذه العلاقة المعدل الزمنى
 لتغير $س$ بالمعدل الزمنى لتغير $ص$

- ❖ يكون المعدل موجباً إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن.
- ❖ يكون المعدل سالباً إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

العدد ه :

$$\begin{aligned} \text{نهـ} \leftarrow \infty &= \left(\frac{1}{س} + 1 \right)^س , \quad \text{نهـ} \leftarrow س = \frac{1}{س(س+1)} \\ \text{نهـ} \leftarrow س &= \frac{1-س^س}{س} , \quad \text{نهـ} \leftarrow س = \frac{لو(س+1)}{س} \\ \text{نهـ} \leftarrow س &= \frac{لو(س+1)}{س} \end{aligned}$$

دالة الأسية ذات الأساس الطبيعي : دالة أسية أساسها ه حيث $د(س) = ه^س$ ، $س \in \mathbb{R}$

دالة اللوغاريتم الطبيعي : دالة لوغاريتمية أساسها ه حيث $د(س) = لو_ه س$ ، $س \in \mathbb{R}^+$

التفاضل اللوغاريتمى : العلاقة بين المتغيرات يمكن ان تمثل بالصيغة اللوغاريتمية وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة وباستخدام خواص اللوغاريتمات يتم تبسيط العلاقة قبل اجراء عمليات التفاضل.

بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي :

إذا كان $س \in \mathbb{R}^+$ ، $ص \in \mathbb{R}$ ، $س \in \mathbb{R}^+$ ، $ص \in \mathbb{R}$ فإن :

(١) الصيغة $ص = لو_ه س$ تكافئ الصيغة $ه^ص = س$

$$\begin{aligned} (٢) \quad س = ه^ص & \quad (٣) \quad لو_ه ه = ١ \quad (٤) \quad لو_ه ١ = صفر \quad (٥) \quad لو_ه س = \frac{لو_ه س}{لو_ه س} \\ & \quad (٦) \quad لو_ه س = \frac{لو_ه س}{لو_ه س} \end{aligned}$$

إذا كان $s \in \mathbb{R}^+$ ، $v \in \mathbb{R}^+$ ، $x \in \mathbb{R}$ فإن :

$$(6) \quad \text{لو } s \text{ ص} = \text{لو } s + \text{لو } v \quad (7) \quad \text{لو } s = \frac{s}{v} = \text{لو } s - \text{لو } v$$

$$(8) \quad \text{لو } s = \text{لو } s^v = \text{لو } s \times \text{لو } v \quad (9) \quad \text{لو } s = 1$$

تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية					
الدالة	المشتقة	الشرط	الدالة	التكامل	الشرط
s^h	$s^h \cdot h$	$s \in \mathbb{R}^+$	s^h	$s^h + \text{ث}$	$s \in \mathbb{R}^+$
$\ln(s)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$	$\frac{1}{s}$	$-\ln(s) + \text{ث}$	$s > 0$
s^p	$s^p \cdot p$	$p \neq -1$	$\ln(s)$	$\ln(s) + \text{ث}$	$s > 0$
$\ln(s)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$	$\ln(s)$	$\ln(s) + \text{ث}$	$s > 0$
$\ln(s)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$	$\ln(s)$	$\ln(s) + \text{ث}$	$s > 0$

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

اختبار المشتقة الأولى لاضطراب الدوال :

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ ،

❖ وكان $d'(s) < 0$ لجميع قيم $s \in [a, b]$ فإن : د متزايدة على $[a, b]$

❖ وكان $d'(s) > 0$ لجميع قيم $s \in [a, b]$ فإن : د متناقصة على $[a, b]$

النقطة الحرجة :

للدالة د المتصلة على $[a, b]$ ، نقطة حرجة (ح) ، $d'(ح) = 0$

إذا كانت : $ح \in [a, b]$ ، $d'(ح) = 0$ أو $d'(ح)$ غير موجودة

القيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة :

إذا كانت دالة معرفة على $[a, b]$ ، وكانت $ح \in [a, b]$ ، وكانت

← د (ح) هى قيمة صغرى مطلقة للدالة على [١ ، ب] عندما يكون د (ح) ≥ د (س) لكل س ∈ [١ ، ب]

← د (ح) هى قيمة عظمى مطلقة للدالة على [١ ، ب] عندما يكون د (ح) ≤ د (س) لكل س ∈ [١ ، ب]

اختبار المشتقة الاولى للقيم العظمى والقيم الصغرى المحلية :

إذا كانت (ح ، د(ح)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند ح ، ووجدت فترة مفتوحة حول ح بحيث :

❖ د' (س) < ٠ عندما س > ح ، د' (س) > ٠ عندما س < ح فإن : د (ح) قيمة عظمى محلية

❖ د' (س) > ٠ عندما س > ح ، د' (س) < ٠ عندما س < ح فإن : د (ح) قيمة صغرى محلية

نظرية :

إذا كانت د قابلة للاشتقاق على [١ ، ب] و كان للدالة د قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية

عند ح ∈ [١ ، ب] فإن د' (ح) = صفر أو د' (ح) غير معرفة .

اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى المحلية :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة [١ ، ب] ، وكانت ح ∈ [١ ، ب] حيث د' (ح) = ٠

➤ إذا كانت : د'' (ح) > ٠ فإن : د (ح) قيمة عظمى محلية

➤ إذا كانت : د'' (ح) < ٠ فإن : د (ح) قيمة صغرى محلية

تحذب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة [١ ، ب] ،

• يكون منحنى الدالة د محدباً لأسفل إذا كانت : د' متزايدة على هذه الفترة.

• يكون منحنى الدالة د محدباً لأعلى إذا كانت : د' متناقصة على هذه الفترة.

اختبار المشتقة الثانية لتحذب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة [١ ، ب] فإنه :

🚩 د'' (س) < ٠ لجميع قيم س ∈ [١ ، ب] فإن منحنى الدالة د يكون محدباً لأسفل على [١ ، ب]

🚩 د'' (س) > ٠ لجميع قيم س ∈ [١ ، ب] فإن منحنى الدالة د يكون محدباً لأعلى على [١ ، ب]

نقطة الانقلاب

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [١ ، ب] وكانت ح ∈ [١ ، ب] وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة

(ح ، د(ح)) فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحذب منحنى الدالة عند هذه

النقطة من محدب لأسفل الي محدب لأعلى او من محدب لأعلى الي محدب لأسفل

التكامل المحدد وتطبيقاته

➤ تفاضلي الدالة :

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س فإن :

$$✓ \text{ تفاضلي ص (ويرمز له بالرمز } \text{ص} \text{) } = \text{د}' (س) \text{ و ص}$$

$$✓ \text{ تفاضلي س (ويرمز له بالرمز } \text{و} \text{) } = \text{د} (س) \text{ و س}$$

➤ التكامل بالتعويض :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

فإذا كانت : $\text{ع} = \text{د}(س)$ دالة قابلة للاشتقاق فإن : $\text{د} (س) \text{ د}' (س) \text{ و س} = \text{د} (ع) \text{ و ع}$

➤ التكامل بالتجزئ :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين والتي ليست احدهما مشتقة للأخرى.

فإذا كانت ص ، ع دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ف

فإن : $\text{د} (س) \text{ و ع} = \text{ع} \text{ و ص} - \text{د} (ع) \text{ و ص}$

➤ قواعد التكاملات الأساسية :

$$\leftarrow \text{د} (س) \text{ و س} = \frac{\text{د} + \text{و}}{1 + \text{و}} \text{ حيث } \text{و} \neq 1 \quad \leftarrow \text{د} (س) \text{ و س} = \text{د} \text{ فاس} \text{ و س} = \text{فاس} + \text{ث}$$

$$\text{و} \neq \pi, \text{و} \exists \text{و} \frac{1+\text{و}^2}{\text{و}}$$

$$\leftarrow \text{د} (س) \text{ و س} = -\text{فاس} \text{ و س} = -\text{فاس} + \text{ث}$$

$$\text{و} \neq \pi, \text{و} \exists \text{و}$$

$$\leftarrow \text{د} (س) \text{ و س} = \text{و} \text{ ه} = \text{و} \text{ ه} + \text{ث}$$

$$\leftarrow \text{د} (س) \text{ و س} = \text{جاس} + \text{ث}$$

$$\leftarrow \text{د} (س) \text{ و س} = \frac{1}{\text{و}} \text{ و س} = \text{لو} | \text{و} | + \text{ث}, \text{و} \neq \text{صفر}$$

$$\leftarrow \text{د} (س) \text{ و س} = \text{فاس} + \text{ث}$$

$$\text{و} \neq \pi, \text{و} \exists \text{و} \frac{1+\text{و}^2}{\text{و}}$$

$$\leftarrow \text{د} (س) \text{ و س} = -\text{فاس} + \text{ث}, \text{و} \neq \pi, \text{و} \exists \text{و}$$

التكامل المحدد :

إذا كانت الدالة f متصلة على $[a, b]$ وكانت F (ت) أى مشتقة عكسية للدالة f على نفس الفترة فإن : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

خواص التكامل المحدد :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx & \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx & \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx & \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

حيث : a, b, c حيث : a, b, c حيث : a, b, c

المساحات :

مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة المتصلة f على الفترة $[a, b]$ والمستقيمين :

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالتين f و g المتصلتين على الفترة $[a, b]$ والمستقيمين :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

الحجوم الدورانية :

ينشأ الجسم الدورانى من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول خط مستقيم يسمى محور الدوران.

حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f على $[a, b]$ ومحور السينات والمستقيمين : $S = \int_a^b f(x) dx$ دورة كاملة حول محور السينات حيث : $f(x) \geq 0$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين f و g المتصلتين على $[a, b]$

والمستقيمين : $\rho = s$ ، $\rho = s$ دورة كاملة حول محور السينات حيث : $d(s) \leq s(s)$

$$\int_0^s \pi = \int_0^s (d(s) - s(s)) ds$$